SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

EQUAZIONI DI MONGE-AMPERE REALI

26 MARZO 1987

1. Consideriamo in $R^{n+1} = \{(x,x_{n+1}),\ X\in R^n,\ x_{n+1}\in R\}$ una ipersuperficie $V = \{x_{n+1} = u(x),\ x\in\Omega\}$, dove Ω è un aperto di R^n e $\phi:\Omega \to R$ è di classe C^2_Ω. La curvatura di Gauss di V nel punto $(x_0,u(x_0))$ (cioè il prodotto delle curvature principali nel punto) è data da

$$(1)\qquad K = (1+|Du|^2)^{-\frac{n+2}{2}}\det(D^2u),$$

dove D^2u designa la matrice hessiana di u.

Data quindi una funzione continua $K:\Omega\to R$, il problema di determinare (se esiste) una ipersuperficie V tale che la sua curvatura di Gauss nel punto $(x,u(x))$ sia eguale a $K(x)$ si traduce nell'equazione

$$(2)\qquad \det(D^2u) = K(x)\,(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Più in generale, chiameremo equazione di Monge-Ampère una equazione del tipo

$$(3)\qquad \det(D^2u) = f(x,u,Du).$$

In [N] vengono ricordati alcuni problemi di geometria che possono essere ricondotti ad equazioni del tipo (3); in particolare, ricordiamo il problema di Minkowski: sia ψ una funzione reale definita su $\mathcal{S}^n$ tale che

$$\int_{\mathcal{S}^n} \nu\psi(\nu)\,dH_n = 0;$$

si vuole allora determinare una ipersuperficie V tale che la sua curvatura di Gauss sia uguale a $\psi(\nu)$ quando ν è la normale a V. Un problema di questo tipo può essere ricondotto a una equazione del tipo (3). Nel seguito, ci limiteremo per semplicità a equazioni del tipo (2) o a equazioni del tipo

$$(3)\qquad \det(D^2u) = \psi(x),$$

anche se parte dei risultati che descriveremo sono validi per classi più generali di equazioni del tipo (3).

2. Per prima cosa, osserviamo che l'operatore linearizzato corrispondente a det (D^2u) è l'operatore

$$(5) \qquad \sum_{i,j} F^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \,,$$

dove la matrice $(F^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ è la matrice dei cofattori della matrice hessiana (D^2u) (cioè $(F^{ij})\,(D^2u) = \det(D^2u)\mathrm{Id}$. Dunque, l'operatore (5) è ellittico se e solo se u è strettamente convessa. E' quindi naturale, almeno in un primo tempo, limitarsi allo studio di soluzioni u strettamente convesse. Iniziamo considerando il problema dell'esistenza di soluzioni classiche del problema di Dirichlet associato a (3). Per semplicità, ci limiteremo al caso in cui f è del tipo (2) o (4). Ricordiamo, di passaggio, che il problema di Neumann per equazioni tipo (2) o (4) è stato studiato in [LTU].

Poiché i risultati differiscono come formulazione nei due casi, iniziamo col trattare il problema di Dirichlet per equazioni del tipo (4).

Determinare $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, u strettamente convessa tale che

$$(6) \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = K & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove K, ϕ sono funzioni sufficientemente regolari su $\bar\Omega$, $K>0$ su $\bar\Omega$ e Ω è un aperto di R^n strettamente convesso con frontiera, ad esempio, C^∞(*).

Risultati di esistenza per il problema (6) sono stati annunciati

(*) esiste cioè $w \in C^\infty(\bar\Omega)$, $w \equiv 0$ su $\partial\Omega$, $(D^2u)>0$ su $\bar\Omega$.

da Pogorelov ([P1]-[P3]) e provati successivamente da Cheng e Yau ([CY1]-[CY3]) P.L. Lions ([L1],[L2]), Caffarelli-Nirenberg-Spruck ([CNS]).

La tecnica di Pogorelov è fondata sulla regolarizzazione di soluzioni deboli nel senso di Alexandrov (descriveremo più avanti queste soluzioni). La dimostrazione originaria di Cheng e Yau è fondata sulla soluzione diretta del problema di Minkowski da cui discende l'esistenza di una soluzione di (6). Successivamente gli stessi autori hanno dato una prova diretta. Esaminiamo ora più in dettaglio le prove di [CNS] e [L1,2]. Osserviamo che in [CNS] si arriva a provare la regolarità C^∞ fino al bordo per dati C^∞. La dimostrazione di [CNS] utilizza il metodo di continuità.

Se w è la funzione strettamente convessa tale che $w=0$ su $\partial\Omega$, possiamo supporre $K_0 = \det(D^2 w) \geq K$ su $\bar\Omega$. Sia ora $\alpha>0$; per ogni $m \in Z$, $m \geq 0$, denotiamo con $C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u \in C^m(\bar\Omega)$ tali che

$$\|u; C^{m,\alpha}(\bar\Omega)\| = \max_{\bar\Omega} \sum_{|\beta|\leq m} |D^\beta u| +$$

$$+ \sum_{|\beta|=m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

Denotiamo poi con $C_0^{m,\alpha}(\bar\Omega)$ il sottospazio delle funzioni nulle su $\partial\Omega$. Indichiamo con U il sottoinsieme di $C_0^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ delle funzioni strettamente convesse su $\bar\Omega$ e con $F: U \times [0,1] \to C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ la funzione così definita:

$$F(u,t) = \det(D^2 u) - tK - (1-t)K_0.$$

Sia T l'insieme dei $t \in [0,1]$ per i quali esiste $u^t \in U$ tale che $F(u^t,t) = 0$. Chiaramente, $T \neq \emptyset$. Siano ora $t_0 \in T$ e $u_0 \in U$ tali che $F(u_0,t_0)=0$; poiché

$$d_u F(u_0,t_0)(v) = \sum_{i,j} u_0^{ij} D_{ij}^2 v,$$

$d_u F(u_0,t_0)$ è un operatore ellittico lineare del secondo ordine con coefficienti $C^\alpha(\bar\Omega)$. Per le stime classiche di Schauder, dunque, $d_u F(u_0,t_0)$ è un isomorfismo di $C_0^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ su $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ ([GT], Teoremi 6.13 e 6.19) e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, l'equazione $F(u,t) = 0$, $u \in U$, è risolubile per $|t-t_0|<\delta$. Ciò prova che T è aperto. A questo punto, una stima a priori

$$\text{(7)} \qquad \|u^t;\ C^{2,\alpha}(\bar\Omega)\| \leq C, \text{ C indipendente da t,}$$

proverebbe che T è chiuso e dunque che $T = [0,1]$, da cui la risolubilità di (6). Il risultato principale di [CNS] è proprio la stima (7) o, più esattamente, una stima del modulo di continuità delle derivate seconde

$$\text{(8)} \qquad \sum_{i,j} |D^2_{ij}u(x) - D^2_{ij}u(y)| \leq \frac{K}{1+|\log|x-y||}, x,y\in\bar\Omega.$$

Dalla (8), insieme ad una stima delle derivate terza all'interno (già nota)

$$\text{(9)} \qquad |D^3u(x)| \leq C\ d(x)^{-1},$$

dove $d(x) = dist(x,\partial\Omega)$, discende la stima di Hölder delle derivate seconde. Osserviamo che la stima

$$\text{(10)} \qquad \|u^t\ ;\ C^2(\bar\Omega)\| \leq C$$

era già nota in precedenza. Osserviamo inoltre che il problema si pone in realtà solo per $n>2$. Infatti, per $n = 2$, la (7) discende dalla (10), grazie a stime hölderiane per le applicazioni quasiconformi.

Osserviamo infine che, nel caso $n>2$, non è possibile rinunciare alla hölderianità delle derivate seconde per una ragione tecnica; se infatti da un lato sarebbe possibile formulare il problema in $C^2(\bar\Omega)$, dall'altro la mancanza di stime a priori in spazi di funzioni continue per le derivate se i coefficienti sono solamente continui non permette di applicare il teorema delle fun-

zioni implicite.

La dimostrazione di (8), (9), (10) utilizza essenzialmente un principio di massimo e la scelta di opportune funzioni barriera, insieme a manipolazioni algebriche (per (9)).

A questo punto, se $K \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, dalle stime classiche di Schauder ([GT], Teorema 6.19) segue che $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$. Una semplice applicazione del principio di massimo assicuro poi che (6) ha una soluzione strettamente convessa. Se infatti u,v sono soluzioni di (6), w = u-v risolve il problema di Dirichlet ellittico

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum_{i,j} a^{ij} D^2_{ij} w = 0 \\ w = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $a^{ij} = \int_0^1$ cofattore di $(tD^2_{ij}u + (1-t)\, D^2_{ij}v)dt$.

Una argomentazione analoga ([HZ2]) permette di provare che il problema di Dirichlet

$$(12)\qquad \begin{cases} \det\,(D^2u) = |x|^2 & \text{se } |x| < 1 \\ u \equiv 1 & \text{se } |x| = 1 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $u = A + B|x|^{2+\frac{2}{n}}$ per opportuni $A,B \in R$. Ciò prova che l'ipotesi di stretta positività di K è essenziale per la regolarità C^{∞}.

Il metodo di P.L. Lions si fonda su una tecnica di penalizzazione del dominio che approssima il problema di Dirichlet omogeneo con problemi su tutto R^n, nel modo seguente (ε>0):

$$(P^\varepsilon)\qquad \begin{cases} \det\left(D^2_{ij}u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\, pu^\varepsilon\, \delta_{ij}\right) = K \text{ in } R^n \\ u^\varepsilon \in C^\infty(R^n)\cap L^\infty(R^n), \\ \left(D^2_{ij}\, u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\, pu^\varepsilon\, \delta_{ij}\right) > 0, \end{cases}$$

dove $p\equiv 0$ su $\bar{\Omega}$ e $\forall\varepsilon>0$ $\exists\gamma>0$; $p(x) \geq \gamma$ se $dis(x,\Omega)\geq\varepsilon$. Si suppone inoltre $K\in C^\infty(R^n)\cap L^\infty(R^n)$, $\inf K = \beta>0$;

Supponiamo di aver provato che (P^ε) ha una soluzione regolare. Utilizzando il principio di massimo, si può allora provare che u^ε tende uniformemente su R^n a una funzione continua u. Inoltre, una stima a priori sulle derivate seconde di u_ε consente di provare che $u\in C^2(\Omega)$. Dunque, per la scelta di p, u è soluzione di (4) su Ω e, per la penalizzazione, $u_\varepsilon \to o$ su $R^n\backslash\Omega$, il che implica che u è nulla su $\partial\Omega$. La convergenza a zero fuori di Ω di $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è ottenuta ancora, via un principio di massimo, dal confronto con una opportuna successione di funzioni convesse che approssimano l'aperto Ω. Osserviamo che questo metodo non dà regolarità fino alla frontiera.

Resta da provare che il problema (P^ε) ha soluzione. A tal fine, osserviamo che, se B è una matrice reale nxn, $B = {}^tB\geq 0$, risulta:

$$(13)\qquad (\det B)^{1/n} = \inf\{Tr(AB),\ A\in V\},$$

dove $V = \{$matrici A reali nxn, $A = {}^tA>0$,

$\det A = n^{-n}\}$.

Se poi $B>0$, l'estremo inferiore è realizzato dalla matrice $A = \frac{1}{n}(\det B)^{1/n}B^{-1}$.

Dunque, (P^ε) può essere scritto nella forma

$$(\tilde{P}^\varepsilon)\qquad \begin{cases} \sup\limits_{A\in V}\{-\sum\limits_{i,j} a_{ij}\, D^2_{ij}u + (TrA)\,\frac{p}{\varepsilon}\, u\} = -f^{1/n} \text{ in } R^n, \\ \left(D^2_{ij}\, u - \frac{p}{\varepsilon}\, u\delta_{ij}\right) > 0 \quad \text{in } R^n, \end{cases}$$

che è una equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman cui si applicano risultati precedenti di P.L. Lions e Evans. In particolare, è possibile scegliere matrici A tali che $A \geq cI$, c essendo una opportuna costante positiva (strettamente). Dunque, il problema $(\tilde{P}^{\varepsilon})$ è ellittico e si applicano quindi risultati di regolarità e stime a priori.

Abbiamo accennato sopra a soluzioni deboli; vogliamo chiarire che cosa si intende con questa espressione. E' chiaro che il senso da dare al concetto di soluzione debole va modellato sulla struttura dell'equazione (e delle soluzioni) per la nonlinearità forte della parte principale. Iniziamo con uno semplice considerazione: sia $u \in C^2(\Omega)$ strettamente convessa soluzione di $\det(D^2u) = K$ in Ω. A causa della stretta convessità di u, l'applicazione $x \to Du(x)$ è iniettiva; integrando allora su Ω e ponendo $p = Du$ si ha:

$$\int_\Omega K(x)dx = \int_\Omega \det\,(D^2u)dx = \int_\Omega dp. \tag{14}$$

Se u non è differenziabile, definiamo la mappa normale χ_u in un punto y Ω nel modo seguente:

$$\chi_u(y) = \{p \in R^n,\ u(x) \geq u(y) + \langle p,w-y\rangle \quad \forall y \in \Omega\}.$$

La mappa normale di un boreliano $E \subseteq \Omega$ è dato da

$$\chi_u(E) = \bigcup_{y \in E} \chi_u(y).$$

$\chi_u(E)$ è a sua volta non boreliano.

La mappa normale è iniettiva modulo insiemi di misura nulla nel senso che

$$|\{p \in R^n,\ p \in \chi_u(y_1) \cap \chi_n(y_2) \text{ per } y_1,\ y_2 \in \Omega,\ y_1 \neq y_2\}| = 0.$$

Ovviamente, se u è differenziabile, $\chi_u(y) = \{Du(y)\}$. Sia ora $R \in L^1_{loc}(R^n)$, $R>0$. Definiamo una funzione d'insieme $\omega(u,R)$ sugli insiemi di Borel di Ω come

$$\omega(u,R)(E) = \int_{\chi_u(E)} R(p)dp.$$

Ora, una funzione convessa u definita in Ω è detta soluzione debole di $R(Du)\det(D^2u) = K$ in Ω se per ogni boreliano E Ω risulta

$$\int_{\chi_u(E)} R(p)dp = \int_E K(x)dx. \tag{15}$$

3. Consideriamo ora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \det(D^2u) = K(x)(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}} & \text{in } \Omega \\ u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega, & u \text{ strettamente convessa,} \end{cases} \tag{16}$$

dove Ω è un aperto strettamente convesso di R^n e $K>0$ su Ω.

Si vede subito che il problema (16) non può essere risolubile per ogni svolta dei dati K e ϕ, indipendentemente dalla loro regolarità. Integrando infatti l'equazione in (16) e ponendo, come sopra, $Du = p$, si ha:

$$\int_\Omega K(x)dx = \int_{Du(\Omega)} (1+|p|)^{-\frac{n+2}{2}} dp \le \int_{R^n} (1+|p|^2)^{-\frac{n+2}{2}} dp = \omega_n.$$

Inoltre, se vogliamo la risolubilità di (16) per ogni ρ sufficientemente regolare, dobbiamo richiedere l'ulteriore condizione $K \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Infatti, se esiste un punto y $\partial\Omega$ tale che $K(y)>0$, è possibile costruire una funzione $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ per la quale il problema (16) non ha soluzioni convesse in $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. La risolubilità del problema (16) sotto le condizione $K = 0$ su

$\partial\Omega$ e $\int_\Omega K < \omega_n$ è stata provata da Trudinger e Urbas [TU].

Il risultato di [TU] è ottenuto approssimando il problema con troncature della funzione $(1+|p|^2)^{\frac{n+2}{2}}$ e utilizzando risultati di P.L. Lions e Caffarelli, Nirenberg e Spruck.

4. Come si è ricordato, la regolarità delle soluzioni del problema (4) è legata alla positività di ψ. La regolarità e la locale risolubilità delle equazioni (3) è stata studiata in [X], [Z], [LI], [HZ1] che estendono un precedente risultato di risolubilità locale di [L] per n=2.

Supponiamo che sia $f \geqq 0$, $f \in C^\infty$ in un intorno di un punto $(y_0, u_0, p_0) \in R^n x R x R^n$. Allora $\forall s \in N$, $s > [\frac{n}{2}] + 3$, l'equazione (3) ha una soluzione convessa $u \in H^s$ in un intorno di y_0. Supponiamo inoltre che tutte le derivate di f fino all'ordine k-1 si annullino in (y_0, u_0, p_0) e che esista un multiindice α di altezza K tale che $D_y^\alpha f(y_0, u_0, p_0) \neq 0$. Allora l'equazione (3) ha una soluzione locale C^∞ e convessa in un intorno di y_0.

L'esistenza di una soluzione H^s è provata utilizzando un adattamento del teorema delle funzioni implicite di Nash-Moser. Successivamente, la regolarità C^∞ è ottenuta utilizzando un risultato di [X] che contiene una versione nonlineare del teorema di ipoellitticità di Hörmander per gli operatori del tipo somma di quadrati di campi vettoriali.

Sostanzialmente, in [X] viene provato che se il linearizzato di un operatore nonlineare può essere scritto come somma di quadrati di campi vettoriali tali che i loro commutatori fino all'ordine r generano tutto lo spazio, allora le soluzioni C^ρ_{loc}, con $\rho > \max\{4, r+2\}$ sono C^∞ (ricordiamo che, per potere eseguire r commutatori, la soluzione deve essere almeno C^{r+2}_{loc}, in quanto la soluzione stessa interviene nei campi). In generale, evidentemente, questa ipotesi è difficile a verificarsi, ma, nel caso di equazioni del tipo (3), la particolare struttura dell'equazione linearizzata insieme all'ipotesi sulle derivate di f permette di controllare l'intero r e successivamente di conclu-

dere applicando il risultato precedente e il teorema di immersione di Sobolev.

Vale la pena di osservare che, in questo caso, la condizione $\rho > \max\{4,r+2\}$, anche se dettata da esigenze tecniche ("scrivere" i commutatori) non è artificiosa, in quanto una regolarità minimale deve essere richiesta per avere una regolarità C^∞. Infatti in [Z] si prova che, se l'equazione è della forma (4), $\psi \geq 0$, $\psi \in C^\infty$ e $(D^2\psi)>0$, allora r=2 e l'equazione (4) possiede soluzioni convesse $u \in C^{2+\varepsilon}$, $u \notin C^3$.

Sempre in [Z] vengono discussi altri esempi che mostrano come una condizione sull'insieme degli zeri di ψ vada formulata se si vuole sperare in un risultato di regolarità C^∞ (gli zeri non debbono essere troppo densi). Ad esempio, data una varietà lineare Σ di R^n, è sempre possibile costruire una funzione analitica ψ in un intorno di $x_0 \in \Sigma$, $\psi \geq 0$ tale che l'equazione (4) possiede soluzioni convesse u in un intorno di x_0, $u \in C^2$, $u \notin C^3$.

5. Se supponiamo in (4) $\psi \leq 0$, l'equazione linearizzata è iperbolica ed è quindi naturale considerare il problema di Cauchy per (4) con dati iniziali, ad esempio, sulla superficie $x_1 = 0$.

$$(17) \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = \psi \leq 0 \\ u(0,x_2,\dots,x_n) = g_0(x_2,\dots,x_u) \\ D_1(0,x_2,\dots,x_n) = g_1(x_2,\dots,x_u). \end{cases}$$

Assumiamo che la matrice $A_{11} = (D^2_{ij})_{inj=2,\dots,n}$ sia positiva su $x_1=0$ ($A_{11/x_1=0}$ è determinata unicamente dai dati di Cauchy g_0 e g_1). Risultati di esistenza e unicità di soluzioni regoalri per (17) sono dati [I,1,2] nei casi seguenti:

i) ψ è strettamente negativa (in questo caso l'operatore linearizzato è strettamente iperbolico);

ii) $\psi \leqq 0$ e $D_1^2\psi < 0$ dove $\psi = 0$ (in questo caso l'operatore linearizzato è effettivamente iperbolico).

BIBLIOGRAFIA

[CNS] L. CAFFARELLI, L. NIRENBERG, J. SPRUCK, The Dirichlet Problem for Nonlinear Second Order Elliptic Equations I: Monge-Ampère Equations, Comm. Pure Appl. Math., 37 (1984), 369-402.

[CY1] S.Y. CHENG, S.T. YAU, On the Regularity of the Solution of the n-dimensional Minkowski Problem, Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), 495-615.

[CY2] ——————, On the Regularity of the Monge-Ampère Equation $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), 41-68.

[CY3] ——————, The Real Monge-Ampère Equation and Affine Flat Structures, Proc. 1980 Beijing Symp. on Differential Geometry, Gordon & Breach, New York 1982, Vol. I, 339-370.

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, Springer 1983.

[HZ1] J. HONG, C. ZUILY, Existence of C^∞ Local Solutions for the Monge-Ampère Equation, prêpublications de l'Universitâ d'Orsay 86 T 23 (1986).

[HZ2] ——————, A Remark Concerning the Dirichlet Problem for a Non-elliptic Monge-Ampère Equation, prêpublications d'Orsay, 86 T 29 (1986).

[I1] N. IWASAKI, The Strongly Hyperbolic Equation and its Applications, Publ. RIMS Kyoto, 1985.

[I2] ——————, The Cauchy Problem for Effectively Hyperbolic Equations, Publ. RIMS Kyoto, 1985.

[LI] C.S. LIN, The Local Isometric Embedding in R^3 of 2-dimensional Riemannian Manifolds with Nonnegative Curvature, J. Diff. Equations, 21 (1985), 213-230.

[L1] P.L. LIONS, Sur les equations de Monge-Ampère, I, Manuscripta Math., 41 (1983), 1-43.

[L2] P.L. LIONS, Sur les equations de Monge-Ampère II, Arch. Rat. Mech. Anal., 89 (1985), 93-122.

[LTU] P.L. LIONS, N.S. TRUDINGER, J.I.E. RUBAS, The Neumann Problem for Equations of Monge-Ampère Type, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), 539-563.

[N] L. NIRENBERG, Monge-Ampère Equations and Some Associated Problems in Geometry, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Vancouver (1974), 275--279.

[P1] A.V. POGORELOV, On a Regular Solution of the n-Dimensional Minkowski Problem, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 1192-1196.

[P2] ———————, On the Regularity of Generalized Solutions of the Equation $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)=\phi(x_1,\ldots,x_n)>0$, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 1436--1440.

[P3] ———————, The Dirichlet Problem for the n-Dimensional Analogue of the Monge-Ampère Equation, Soviet Math. Dokl., 12 (1971), 1727-1731.

[TU] N.S. TRUDINGER, J.I.E. URBAS, The Dirichlet Problem for the Equation of Prescribed Gauss Curvature, Bull. Austral. Math. Soc., 28 (1983), 217--231.

[U] J.I.E. URBAS, The Equation of Prescribed Gauss Curvature without Boundary Conditions, J. Differential Geometry, 20 (1984), 311-327.

[X] C.J. XU, Régularité des solutions des e.d.p. non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 300 (1985), 217-270.

[Z] C. ZUILY, Sur la règularité des solutions non strictement convexes de l'equation de Monge-Ampère réelle, prépublications d'Orsay, 86T33 (1986).